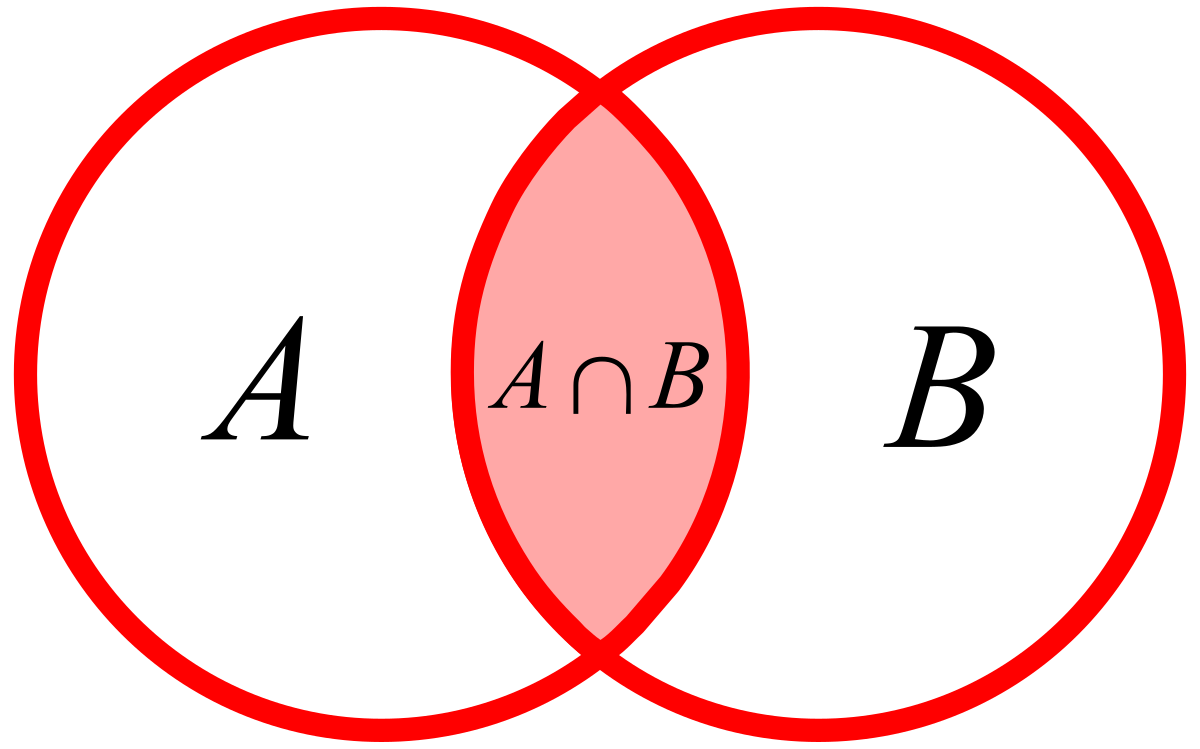
**Teoría de Conjuntos  
(Semana 1 – 8:50)**



# Teoría de conjuntos Guía Completa

## Conceptos Fundamentales

### 1.1.1 Definición de Conjunto

Un **conjunto** es una colección de objetos bien definidos y distinguibles llamados **elementos** o **miembros** del conjunto. Los conjuntos se denotan Generalmente con letras mayúsculas (A, B,C, etc), mientras sus elementos se denotan con letras minúsculas (a,b,c,etc).

Para indicar que un elemento pertenece a un conjunto utilizamos el símbolo ∈. Por ejemplo, sí a es un elemento del conjunto a escribimos:

* a ∈ A (a pertenece a A)

para indicar que un elemento no pertenece a un conjunto utilizamos el símbolo ∉. Por ejemplo:

* b ∉ A (b no pertenece a A)

### Representación de conjuntos

Existen varias formas de representar conjuntos:

1. **Método extensivo o por enumeración:** consiste en listar todos los elementos del conjunto entre llaves**.** Por ejemplo**:**

* A = {1,2,3,4,5}
* B = {a,e,i,o,u}

1. **Método intensivo o por comprensión:** se define mediante una propiedad o característica que cumplen todos sus elementos. Por ejemplo:

* A = {x | x es un número natural menor que 6} (se lee: “A es el conjunto de los X tales que x es un número natural menor que 6”)
* B = {x | x es una vocal del alfabeto español}

1. **Diagramas de Venn:** representación gráfica donde se utilizan regiones cerradas (generalmente círculos) para representar conjuntos y sus relaciones.

### Tipos de conjuntos básicos:

* **Conjunto vacío (∅):** Es el conjunto que no tiene elementos también se puede representar como {}
* **Conjunto unitario:** Contiene exactamente un elemento. Por ejemplo: A = {5}.
* **Conjunto finito:** Tiene un número limitado de elementos que pueden contarse mediante números naturales.
* **conjunto infinito:** tiene un número ilimitado de elementos. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales (N).
* **conjunto universal (U):** en un contexto específico, es el conjunto que contiene todos los elementos bajo consideración.

### Conjuntos numéricos fundamentales

* **números naturales (ℕ):** {1,2,3,4…}
* **números enteros (ℤ):** {…, -3, -2, -1,0,1,2,3,4…}
* **números racionales (ℚ):** {p/q ∣p, q ∈ ℤ, q ≠ 0}
* **números irracionales (𝕀):** números reales que no pueden expresarse como fracción de enteros (por ejemplo: π, √2, e)
* **números complejos (ℂ):** {a +bi ∣ a,b ∈ℝ, i = √-1}

## Relaciones entre conjuntos:

### 1.2.1 Igualdad de conjuntos:

Dos conjuntos A y B son iguales (A = B) Sí y solo así tienen exactamente los mismos elementos. Formalmente:

* A = B ⟺ ∀x(x ∈ A ⟺ x ∈ B)   
  “El conjunto A es igual conjunto B si y solo si, para todo elemento x, x pertenece a A si y solo si x pertenece a B”

**Ejercicios:**

1. A = {1,2,3} y B = {3,1,2} → A = B (el orden no importa)

**Se lee:**A es igual al conjunto formado por los elementos 1,2 y 3, y B es igual al conjunto formado por los elementos 3,1 y 2. Por lo tanto, A es igual a B, ya que el orden de los elementos no importa en un conjunto.

1. A = {a,e,i,o,u} y B = {vocales del alfabeto español} → A = B

**Se lee:**

A es igual al conjunto formado por los elementos a,e,i,o,u, y B es igual al conjunto de las vocales del alfabeto español. Por lo tanto, A es igual a B.

1. A = {2,4,6,8} y B = {x | x es un numero par positivo menor que 10} → A = B.

**Se lee:**

A es igual al conjunto formado por los elementos 2,4,6 y 8, y B es igual al conjunto de todos los x tales que x es un numero par positivo menor que 10. Por lo tanto, A es igual a B.

1. A = {0} y B = {x | x² = 0} → A = B

**Se lee:**A es igual al conjunto formado por el elemento 0, y B es igual al conjunto de todos los x tales que x al cuadrado es igual a 0. Por lo tanto, A es igual a B.

1. A = ∅ y B = {} → A = B (ambas son representaciones del conjunto vacio)

**Se lee:**

A es igual al conjunto vacio y B es igual al conjunto vacio. Por lo tanto, A es igual a B, ya que ambas son representaciones del conjunto vacio.

1. A = {1,2,3,2} y B = {1,2,3} → A = B (los elementos repetidos no cuentan)

**Se lee:**

A es igual al conjunto formado por los elementos 1,2,3 y 2, y B es igual al conjunto formado por los elementos 1,2 y 3. Por lo tanto, A es igual a B, ya que los elementos repetidos no cuentan en un conjunto.

1. A = {x | x²-1 = 0} y B = {-1,1} → A = B

**Se lee:**

A es igual al conjunto de todos los x tales que x al cuadrado menos 1 es igual a 0, y B es igual al conjunto formado por los elementos -1 y 1. Por lo tanto, A es igual a B.

1. A = {x | x es una solución de x² -5x+6 = 0} y b = {2,3} → A = B

**Se lee:**

A es igual al conjunto de todos los x tales que x es una solución de la ecuación x al cuadrado menos 5x mas 6 igual a 0, y B es igual al conjunto formado por los elementos 2 y 3. Por lo tanto, A es igual a B.

1. A = {x | x es un mes del año con 30 dias} y B = {abril, junio, septiembre, noviembre} →A = B.

**Se lee:**

A es igual al conjunto de todos los x tales que x es un mes del año con 30 dias, y B es igual al conjunto formado por los elementos abril, junio, septiembre y noviembre. Por lo tanto, A es igual a B.

1. A = {x ∣ x es un numero primo menor que 10} y B = {2,3,5,7} → A = B  
   **Se lee:**

A es igual al conjunto de todos los x tales que x es un numero primo menor que 10, y B es igual al conjunto formado por los elementos 2,3,5 y 7. Por lo tanto, A es igual a B.

**Recordatorio:**

En la notación de conjuntos por comprensión {x | condición}, la variable x representa cualquier elemento que pertenece al conjunto.  
Cuando se lee un conjunto definido por compresión como:  
{ x | x es un numero primo menor que 10}  
Esto se lee: “el conjunto de todos los x tales que x es un numero primo menor que 10”.  
x: variable que representa cada elemento potencial del conjunto.  
la parte despues de la barra vertical (|) es la condición o propiedad que debe cumplir x para pertenecer al conjunto.

### 1.2.2 Subconjunto:

Un conjunto A es un subconjunto de B (denotado como A ⊆ B) Sí todos los elementos de A están en B. formalmente:

* A ⊆ B ⇔ ∀x(x ∈A ⇒ x ∈B)

**Ejercicios:**

1. A = {1,2} y B = {1,2,3,4,5} → A ⊆ B
2. A = {a,e} y B = {a,e,i,o,u} → A ⊆ B
3. A = {2,4,6} y B = {x | x es un número par positivo} A ⊆ B
4. A = {1,2,3} y B = {1,2,3} A ⊆ B **(todo conjunto es subconjunto de si mismo)**
5. A = ∅ y B = {1,2,3} A ⊆ B **(el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto)**
6. A = {x | x es un planeta del sistema solar} y B = {x | x es un cuerpo celeste} A ⊆ B
7. A = {lunes, martes} y B = {x | x es un día de la semana} A ⊆ B
8. A = {x | x es un número natural par menor que 5} y B = {2,4,6,8,10} A ⊆ B
9. A = {1} y B = {1, {1}} A ⊆ B
10. A = {x | x es un mamifero acuatico} y B = {x | x es un animal vertebrado} A ⊆ B

**Desde el punto de vista de Subconjunto Propio:**1. A = {1,2} y B = {1,2,3,4,5} → A ⊂ B (subconjunto propio)  
2. A = {a,e} y B = {a,e,i,o,u} → A ⊂ B (subconjunto propio)  
3. A = {2,4,6} y B = {x | x es un numero par positivo} → A ⊂ B (subconjunto propio)  
4. A = ∅ y B = {1,2,3} → A ⊂ B (subconjunto propio)  
5. A = {x | x es un planeta del sistema solar} y B = {x | x es un cuerpo celeste} → A ⊂ B (subconjunto propio)  
6. A = {lunes, martes} y B = {x | x es un día de la semana} → A ⊂ B (subconjunto propio)  
7. A = {x | x es un número natural par menor que 5} y B = {2,4,6,8,10} → A ⊂ B (subconjunto propio)  
8. A = {1} y B = {1, {1}} → A ⊂ B (subconjunto propio)  
9. A = {x | x es un mamífero acuático} y B = {x | x es un animal vertebrado} → A ⊂ B (subconjunto propio)

El único caso que NO es un subconjunto propio es:  
4. A = {1,2,3} Y B = {1,2,3} → A ⊆ B pero no A ⊂ B, porque A = B (aquí A es subconjunto de B pero no es subconjunto propio, ya que ambos conjuntos son iguales)

### 1.2.3 Subconjunto Propio:

A es un subconjunto propio de B (denotado como A ⊂ B) si A es un subconjunto de B y existe al menos un elemento en B que no esta en A. formalmente:

* A ⊂ B ⇔ (A ⊆ B) ∧ (A ≠ B)

**Ejercicios:**

1. A = {1,2} y B = {1,2,3} → A ⊂B
2. A = {a} y BG = {a,b,c} → A ⊂B
3. A = ∅ y B = {1} → A ⊂B
4. A = {2,4} y B = {1,2,3,4,5} A ⊂B
5. A = {x | x es un número primo menor qué 10} y B = {x | x es un número primo} → A ⊂ B
6. A = {rojo, azul} y B = {rojo, azul, verde, amarillo} → A ⊂B
7. A = {x | x es una capital europea y B = {x | x es una ciudad del mundo} A ⊂B
8. A = {1,3,5} y B = {1,2,3,4,5} → A ⊂ B
9. A = {x | x es un numero entero negativo} y B = {x | x es un numero entero} → A ⊂ B
10. A = {gato, perro} y B = {x | x es un animal doméstico} → A ⊂ B

#### **1.2.3.1 Subconjuntos vs subconjuntos propios**

* Ejemplo 1:

A = {a,b}

B = {a,b,c,d}

A ⊆ B (A es subconjunto de B porque todos los elementos de A están en B)

A ⊂ B (A es subconjunto propio de B porque A ≠ B; B contiene c y d que no están en A)

* Ejemplo 2:

A = {1,2,3}

B = {1,2,3}

A ⊆ B (A es subconjunto de B)

A ⊄ B (A NO es un subconjunto propio de B porque A = B)

* Ejemplo 3:

A = {x | x es un numero par menor que 10}

B = {x | x es un numero par}

A = {2,4,6,8}

A ⊆ B (todos los números pares menores que 10 son números pares)

A ⊂ B (B incluye muchos más números pares como 10, 12, 14, etc, que no están en A)

* Ejemplo 4:

A = {lunes, martes, miércoles,jueves,viernes}

B = {x | x es un día de la semana}

B = {lunes, martes, miércoles,jueves,viernes, sábado, domingo}

A ⊆ B (todos los días laborales son días de la semana)

A ⊂ B (B incluye también sábado y domingo)

* Ejemplo 5:

A = ∅ (conjunto vacio)

B = ∅ (conjunto vacio)

A ⊆ B (El conjunto vacio es subconjunto de si mismo)

A ⊄ B (A NO es un subconjunto propio de B porque A = B)

* Ejemplo 6:

A = {Mexico}

B = {Mexico, Canada, Estados Unidos}

A ⊆ B (Mexico esta en el conjunto B)

A ⊂ B (B contiene otros países que no están en A)

* Ejemplo 7:

A = {a,b,c}

B = {a,b,c,a} **(nota: los elementos repetidos no cuentan en un conjunto)**

B simplificado = {a,b,c}

A ⊆ B (Todos los elementos de A están en B)

A ⊄ B (A NO es subconjunto propio de b porque A = B)

* Ejemplo 8:

A = {1,2,3,4}

B = {1,2,3,4,5}

C = {1,2,3,4}

A ⊆ B (A es subconjunto de B)

A ⊂ B (A es subconjunto propio de B)

A ⊆ B (A es subconjunto de C)

A ⊄ C (A no es un subconjunto propio de C)

* Ejemplo 9:

A = { x | x es un mamifero acuatico}

B = { x | x es un mamifero}

A ⊆ B (todos los mamíferos acuáticos son mamíferos)

A ⊂ B (existen muchos mamíferos terrestres que no están en A)

**DOS TIPOS DE NOTACIONES CON LECTURAS DIFERENTES**

1. **A ⊆ B:** Se lee “A es subconjunto de B” O “A este contenido en B”
   * Significa que todos los elementos de A también están en B
   * A puede ser igual a B
   * Por ejemplo: {1,2} ⊆ {1,2,3}
   * También: {1,2} ⊆ {1,2} (aquí son iguales)
2. **A ⊂ B:** Se lee “A es subconjunto propio de B” o “A este contenido estrictamente en B”
   * Significa que todos los elementos de A están en B, pero B tiene al menos un elemento adicional
   * A nunca puede ser igual a B
   * Por ejemplo: {1,2} ⊂ {1,2,3}
   * Pero: {1,2} ⊄ {1,2} (no se cumple porque son iguales)

### 1.2.4 Conjunto de Partes o Conjunto Potencia:

El conjunto de partes de A (denotado como P(A) o 2^A) es el conjunto de todos los subconjuntos posibles de A, incluyendo el conjunto vacío y el propio A.

Si A tiene n elementos, entonces P(A) tiene 2 ^n elementos.

Ejemplo: Si A = {1,2,3}, entonces:  
P(A): {∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}}

El conjunto potencia P(A) de un conjunto A es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de A, incluyendo el conjunto vacio ∅ y el propio conjunto A.

Para entenderlo mejor:

1. P(∅) = {∅}

El conjunto potencia del conjunto vacío contiene un solo elemento: el conjunto vacio mismo

1. P({a}) = {∅, {a}}

El conjunto potencia de un conjunto con un solo elemento “a” contiene dos elementos:

* El conjunto vacío
* El conjunto {a}

1. P({1,2}) = {∅, {1}, {2}, {1,2}}  
   El conjunto potencia de un conjunto con dos elementos contiene cuatro elementos:  
   - El conjunto vacio ∅  
   - El conjunto {1}  
   - El conjunto {2}  
   - El conjunto {1,2}
2. P({a,b,c}) = {∅, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}}

Este es el conjunto potencia de un conjunto con tres elementos, que contiene ocho subconjuntos (2³=8)

La regla general es: Si un conjunto A tiene n elementos, entonces su conjunto potencia P(A) tendrá 2ⁿ elementos.

Por eso, para A = {1,2,3}, su conjunto potencia P(A) tiene 2³ = 8 elementos, que son:

* El conjunto vacio {∅}
* Los conjuntos con un elemento: {1}, {2}, {3}
* Los conjuntos con dos elementos: {1,2}, {1,3},{2,3}
* El conjunto completo: {1,2,3}

**Ejemplos:**

* 1. P({}) = {∅} (El conjunto potencia del conjunto vacio contiene al conjunto vacio)
* 2. P({a}) = {∅, {a}} (dos subconjuntos)
* 3. P({1,2}) = {∅, {1},{2},{1,2}} (cuatro subconjuntos)
* 4. P({a,b,c}) = {∅, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}} (ocho subconjuntos)
* 5. P({0}) = {∅, {0}} (dos subconjuntos)
* 6. P({x,y}) = {∅, {x}, {y}, {x,y}} (cuatro subconjuntos)
* 7. P({1}) = {∅, {1}} (dos subconjuntos)
* 8, P({1,2,3,4}) = {∅, {1},{2},{3},{4},{1,2},{1,3},{1,4},{2,3},{2,4},{3,4},{1,2,3},{1,2,4},{1,3,4},{2,3,4},{1,2,3,4}} (16 subconjuntos)
* P({1,2,3,4}) = {∅, {1}, {2}, {3}, {4}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}, {1,2,3,4}} (dieciséis subconjuntos)
* P({rojo,verde}) = {∅, {rojo}, {verde}, {rojo, verde}} (cuatro subconjuntos)
* P({a, b, c, d}) tiene 2⁴ = 16 elementos

#### **1.2.4.1 Ejemplos prácticos del conjunto potencia P(A)**

**1. Opciones de vestuario:** Si tienes 3 prendas (camisa, pantalón, sombrero), el conjunto potencia representa todas las combinaciones posibles de atuendos, incluyendo no usar ninguna prenda y usar todas.

2. **Menú de restaurante:** Si un restaurante ofrece personalizar hamburguesas con 3 ingredientes (queso, tocino, champiñones), el conjunto potencia representa todas las posibles combinaciones de hamburguesas (8 combinaciones).

3. **Configuración de un dispositivo:** Si un dispositivo tiene 4 ajustes que pueden activarse o desactivarse, el conjunto potencia representa todas las configuraciones posibles (16 configuraciones).

4. **Participantes en reuniones:** Si hay 5 personas en un equipo, el conjunto potencia representa todos los posibles subgrupos que podrían reunirse (32 subgrupos).

**Ejercicios:**

1. **Calcula P({rojo, azul}):** Respuesta: {∅, {rojo}, {azul}, {rojo, azul}} (4 subconjuntos)
2. Si A = {1, 2, 3, 4}, **enumera todos los subconjuntos con exactamente 2 elementos  
   Respuesta: {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}} (6 subconjuntos)**
3. **Si P(A) tiene 32 elementos, ¿cuántos elementos tiene el conjunto A?**

Resolución: 2^n = 32, entonces 2^5 = 32, por lo tanto n = 5

## Operaciones con Conjuntos:

### Unión (∪)

La unión de dos conjuntos A y B (denotado como A ∪ B) es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B (o a ambos). Formalmente:

* A ∪B = {x | x ∈ A ∨ x ∈ B}

**Ejercicios:**

1. {1,2,3} ∪ {3,4,5} = {1,2,3,4,5}
2. {a,b,c} ∪ {d,e,f} = {a,b,c,d,e,f}
3. {1,3,5} ∪ {2,4,6} = {1,2,3,4,6,}
4. {x,y} ∪{y,z} = {x,y,z}
5. {1,2} ∪∅ = {1,2}
6. {rojo, azul} ∪ {verde, amarillo} = {rojo, azul, verde, amarillo}
7. {a,b} ∪{a,b} = {a,b}
8. {1,2,3} ∪ {4,5,6} = {1,2,3,4,5,6}
9. {lunes, martes} ∪ {miércoles, jueves} = {lunes, martes, miércoles, jueves}
10. {p,q,r} ∪ {s,t} = {p,q,r,s,t}

### Intersección (∩)

La intersección de dos conjuntos A y B (denotado como A ∩B) es el conjunto de todos los elementos que pertenecen tanto a A como a B. Formalmente:

* A ∩B = {x | x ∈ A ∧ x ∈ B}

**Ejercicios:**

1. {1,2,3,4} ∩ {3,4,5,6} = {3,4}
2. {a,b,c} ∩ {c,d,e} = {c}
3. {1,3,5,7} ∩ {2,4,6,8} = ∅
4. {x,y,z} ∩ {y,z,w} = {y,z}
5. {1,2,3} ∩ {1,2,3} = {1,2,3}
6. {rojo,azul, verde} ∩ {verde, amarillo, naranja} = {verde}
7. {lunes, martes, miércoles} ∩ {jueves, viernes} = ∅
8. {a,e,i,o,u} ∩ {a,b,c,d,e} = {a,e}
9. {1,2,3} ∩ ∅ = ∅
10. {perro, gato, conejo} ∩ {gato, hámster, pez} = {gato}

**Reglas generales para el conjunto vacío en Intersección**

1. **A ∩ ∅ =** ∅:La intersección de cualquier conjunto A con el conjunto vacío siempre da como resultado el conjunto vacío.
2. **A ∩ A =** A:La intersección de un conjunto consigo mismo siempre da como resultado el conjunto original, como vemos en el ejemplo 5.
3. **A ∩ B =** ∅ cuando A y B no tienen elementos en común (son conjuntos disjuntos).

### Diferencia (-)

La diferencia entre dos conjuntos A y B (denotado como A – B) es el conjunto de elementos que pertenecen a A pero no a B. Formalmente:

* A -B = {x | x ∈ A ∧ x ∉ B}

**Ejercicios:**

1. {1,2,3,4,5} – {4,5,6} = {1,2,3}
2. {a,b,c,d} – {c,d,e} = {a,b}
3. {1,2,3} – {1,2,3} = ∅
4. {x,y,z} - ∅ = {x,y,z}
5. {1,2,3,4} – {2,4} = {1,3}
6. {rojo,azul,verde} – {verde,amarillo} = {rojo,azul}
7. {lunes,martes,miércoles} – {miércoles,jueves} = {lunes, martes}
8. {a,e,i,o,u} – {a,e} = {i,o,u}
9. ∅ - {1,2,3} = ∅
10. {1,2,3,4,5} – {6,7,8} = {1,2,3,4,5}

**Reglas generales para el conjunto vacío en Diferencia**

1. **A -∅ = A:** Restar el conjunto vacío de cualquier conjunto A siempre da como resultado el conjunto A original.
2. **∅ - A = ∅:** Restar cualquier conjunto A del conjunto vacío siempre da como resultado el conjunto vacío.
3. **A -A =** ∅: Restar un conjunto de sí mismo siempre da como resultado el conjunto vacío.

### Diferencia Simétrica (△ o ⊕)

La diferencia simétrica de A y B (denotado como A △ B o A ⊕ B) es el conjunto de elementos que pertenecen a A o B, pero no a ambos. Formalmente:

* A △ B = (A − B) ∪ (B − A) = (A ∪ B) − (A ∩ B)

**Ejercicios:**

1. {1,2,3} △ {3,4,5} = {1,2,4,5}
2. {a,b,c} △ {c,d,e} = {a,b,d,e}
3. {1,2,3} △ {4,5,6} = {1,2,3,4,5,6}
4. {x,y} △ {y,z} = {x,z}
5. {1,2,3} △ {1,2,3} = ∅
6. {a,b} △ ∅ = {a,b}
7. {rojo, azul} △ {3,4,5,6} = {1,2,5,6}
8. {1,2,3,4} △ {3,4,5,6} = {1,2,5,6}
9. {a,e,i} △ {o,u} = {a,e,i,o,u}
10. {perro, gato} △ {gato, conejo} = {perro, conejo}

**Reglas generales para la diferencia simétrica**

1. **A △ ∅ = A:** La diferencia simétrica de cualquier conjunto A con el conjunto vacío siempre da como resultado el conjunto A original.
2. **A △ A = ∅**: La diferencia simétrica de un conjunto consigo mismo siempre da como resultado el conjunto vacío.
3. **A △ B = B △ A**: La diferencia simétrica es conmutativa.
4. **A △ B = (A - B) ∪ (B - A)**: La diferencia simétrica puede expresarse como la unión de las diferencias entre los conjuntos.
5. **A △ B = (A ∪ B) - (A ∩ B)**: También puede expresarse como la unión de los conjuntos menos su intersección.

### Complemento (A')

El complemento de un conjunto A respecto a un conjunto universal U (denotado como A’ o A^c o U−A) es el conjunto de elementos que pertenecen a U pero no a A. Formalmente:

* A' = {x | x ∈ U ∧ x ∉ A} = U – A

**Ejercicios:**

1. Si A = {1,2,3}, entonces A’ = {4,5,6,7,8,9,10}
2. Si A = {2,4,6,8,10}, entonces A’ = {1,3,5,7,9}
3. Si A = {1,3,5,7,9}, entonces A’ = {2,4,6,8,10}
4. Si A = ∅, entonces A’ = U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
5. Si A = U, entonces A’ = ∅
6. Si A ={5}, entonces A’ = {1,2,3,4,6,7,8,9,10}
7. Si A = {1,10}, entonces A’ = {2,3,4,5,6,7,8,9}
8. Si A = {1,2,3,4,5}, entonces A’ = {6,7,8,9,10}
9. Si A = {6,7,8,9,10}, entonces A’ = {1,2,3,4,5}
10. Si A = {3,6,9}, entonces A’ = {1,2,4,5,7,8,10}

#### **Ejercicios Complejos de Operaciones con Conjuntos 1/2**

Tenemos el conjunto universal U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20}

1. **Operaciones con Múltiples Conjuntos**

Sean los conjuntos:

* A = {1,3,5,7,9,11}
* B = {2,4,6,8,10,12}
* C = {1,2,3,4,5,6}
* D = {5,1,15,20}

**Disjuntos:** No tienen elementos en común.

Ejemplos:

* 1. **Unión de tres conjuntos:** AU B U C

A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

(A ∪ B) ∪ C = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Resultado: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

* 1. **Intersección de tres conjuntos:** A ∩ B ∩ C

A ∩ B = ∅ (No hay elementos comunes entre A y B)

(A ∩ B) ∩ C = ∅ ∩ C = ∅

Resultado: ∅

* 1. **Combinación de unión e intersección:** (A ∪ B) ∩ C

A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

(A ∪ B) ∩ C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Resultado: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

* 1. **Diferencia con múltiples conjuntos:** A – (B ∪ C)

B ∪ C = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12}

A - (B ∪ C) = {7, 9, 11}

Resultado: {7, 9, 11}

* 1. **Complemento de la unión:** (A ∪ D)'

A ∪ D = {1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 15, 20}

(A ∪ D)' = {2, 4, 6, 8, 12}

Resultado: {2, 4, 6, 8, 12}

* 1. **Diferencia simétrica encadenada:** A △ B △ C

**A △ B =** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} (todos los elementos, pues A y B son disjuntos)

**(A △ B) △ C =** {7, 8, 9, 10, 11, 12} (quedan los que no están en C)

**Resultado:** {7, 8, 9, 10, 11, 12}

1. **Operaciones con Complementos**

Tenemos el conjunto universal U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20}

Sean los conjuntos:

* A = {1,3,5,7,9,11}
* B = {2,4,6,8,10,12}
* C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
* D = {5, 10, 15, 20}
  1. **Leyes de Morgan:** (A ∩ B)'
* **A ∩ B = ∅**
* **(A ∩ B)'** = U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20}

**Alternativamente: (**A ∩ B)' **=** A’ ∪ B’

* **A’ =** {2,4,6,8,10,12,15,20}
* **B’ =** {1,3,5,7,9,11,15,20}
* **A' ∪ B' =** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20}
* **Resultado:** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20}
  1. **Complemento del complemento:** (A’)’
* A = {1,3,5,7,9,11}
* A’ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 20}
* A = {1,3,5,7,9,11}

**2.3 Complemento de la diferencia simétrica:** (A △ D)'

* **A △ D =** {1, 3, 7, 9, 10, 11, 15, 20}
* **(A △ D)' =** {2, 4, 5, 6, 8, 12}

**Resultado:** {2, 4, 5, 6, 8, 12}

1. **Operaciones Combinadas Complejas**

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20}

* A = {1,3,5,7,9,11}
* B = {2,4,6,8,10,12}
* C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
* D = {5, 10, 15, 20}
  1. **Expresión combinada 1:** ((A ∩ C) ∪ (B ∩ D)) - (A ∩ D)
* A ∩ C = {1,3,5}
* B ∩ D = {10}
* (A ∩ C) ∪ (B ∩ D) = {1,3,5,10}
* A ∩ D = {5}
* ((A ∩ C) ∪ (B ∩ D)) - (A ∩ D) = {1, 3, 10}
* Resultado: {1,3,10}
  1. **Expresión combinada 2:** ((A ∪ B)' ∩ (C ∪ D)) △ (C' ∩ D')

((A ∪ B)' ∩ (C ∪ D)) △ (C' ∩ D')

* **A ∪ C** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

((A ∪ B)' ∩ (C ∪ D)) △ (C' ∩ D')

* **(A ∪ B)’** = {15,20}

((A ∪ B)' ∩ (C ∪ D)) △ (C' ∩ D')

* **C ∪ D** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 20}

((A ∪ B)' ∩ (C ∪ D)) △ (C' ∩ D')

* **(A ∪ B)' ∩ (C ∪ D)** = {15, 20}

((A ∪ B)' ∩ (C ∪ D)) △ (C' ∩ D')

* **C'** = {7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20}

((A ∪ B)' ∩ (C ∪ D)) △ (C' ∩ D')

* **D'** = {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12}

((A ∪ B)' ∩ (C ∪ D)) △ (C' ∩ D')

* **C' ∩ D' =** {7, 8, 9, 11, 12}

((A ∪ B)' ∩ (C ∪ D)) △ (C' ∩ D')

* Resultado: {7, 8, 9, 11, 12, 15, 20}

**3.3 Expresión combinada 3:** (A ∩ B ∩ C)' ∪ (A' ∩ B' ∩ D)

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20}

* A = {1,3,5,7,9,11}
* B = {2,4,6,8,10,12}
* C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
* D = {5, 10, 15, 20}

**Desarrollo de ejercicio:**

1. **(A ∩ B ∩ C)' ∪ (A' ∩ B' ∩ D)**

* A ∩ B ∩ C = ∅
* (A ∩ B ∩ C)' = U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20}
* A' = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 20}
* B' = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 20}
* A' ∩ B' = {15, 20}
* A' ∩ B' ∩ D = {15, 20}
* (A ∩ B ∩ C)' ∪ (A' ∩ B' ∩ D) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20}
* Resultado: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20}

#### **Ejercicios Complejos de Operaciones con Conjuntos 2/2 (paso a paso)**

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}

* A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}
* B = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}
* C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
* D = {7, 8, 9, 10, 11, 12}

1. **[(A ∩ C)' ∪ (B ∩ D)] ∩ U**

A ∩ C

(A ∩ C)'

B ∩ D

(A ∩ C)' ∪ (B ∩ D)

[(A ∩ C)' ∪ (B ∩ D)] ∩ U

#### **Operaciones de conjuntos para luego relación**

Definición de Conjuntos:

A = {1, 2, 3, 4, 5}  
B = {4, 5, 6, 7, 8}  
C = {7, 8, 9, 10}

1. Unión (A ∪ B)

A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

1. Intersección (A ∩ B)

A ∩ B = {4, 5}

1. Diferencia (A - B)

A - B = {1, 2, 3}

1. Diferencia Simétrica (A △ B)

A △ B = {1, 2, 3, 6, 7, 8}

1. Complemento

Considerando el conjunto universal U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

A' (complemento de A) = {6, 7, 8, 9, 10}

Encontrar las relaciones entre conjuntos:

1. Subconjuntos

* (A ∩ B) ⊆ A: Verdadero
* (A ∩ B) ⊆ B: Verdadero
* A ∩ B = {4,5} es un subconjunto propio de A y B

1. Intersección mínima

* A ∩ B ≠ ∅ (no es vacía)
* A ∩ C = ∅ (es vacía)

1. Cardinalidad

* |A| =5
* |B| =5
* |A ∩ B| = 2
* |A∪B|= 8

1. Relaciones de inclusión

* {4, 5} ⊂ A
* {4, 5} ⊂ B
* {4, 5} = A ∩ B

1. Conjuntos Disjuntos

* A y C son conjuntos disjuntos (no tienen elementos en común)

## Propiedades de las Operaciones con Conjuntos:

### Propiedades de la Unión e Intersección

1. **Conmutatividad:**

A ∪ B = B ∪ A

A ∩ B = B ∩ A

1. **Asociatividad:**

(A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C)

(A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)

1. **Distributividad:**

A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)

A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)

1. **Leyes de Identidad**

A ∪ ∅ = A

A ∩ U = A

1. **Leyes de dominación**

A ∪ U = U

A ∩ ∅ = ∅

1. **Leyes de Idempotencia**

A ∪ A = A

A ∩ A = A

1. **Ley del Complemento**

A ∪ A' = U

A ∩ A' = ∅

### Propiedades de la Unión e Intersección

Estas leyes establecen una dualidad entre las operaciones de unión e intersección

* (A ∪ B)' = A' ∩ B'
* (A ∩ B)' = A' ∪ B'

**Leyes de Morgan a profundidad:**

Principios fundamentales de la lógica matemática y teoría de conjuntos que establecen una relación entre las operaciones de unión, intersección y complemento.

**Primera ley de De Morgan**

El complemento de la unión de dos conjuntos es igual a la intersección de sus complementos:

(A ∪ B)' = A' ∩ B'

**Segunda Ley de De Morgan**

El complemento de la intersección de dos conjuntos es igual a la unión de sus complementos:

(A ∩ B)' = A' ∪ B'

#### **4.1.2.1 Ejemplo práctico para confirmar las leyes**

**Confirmación de la primera ley**(A ∪ B)' = A' ∩ B'Conjunto Universal U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} y los conjuntos:

* A = {1,3,5,7}
* B = {2,4,6,8}

Verificar la primera ley:

1. A ∪ B = {1,2,3,4,5,6,7,8}
2. (A ∪ B)’ = {9,10}
3. A’ = {2,4,6,8,9,10}
4. B’ = {1, 3, 5, 7, 9, 10}
5. A' ∩ B' = {9, 10}

Como se puede ver, (A ∪ B)' = A' ∩ B', confirmando la primera ley.

**Confirmación de la segunda ley**

(A ∩ B)' = A' ∪ B'  
Conjunto Universal U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} y los conjuntos:

* A = {1,3,5,7}
* B = {2,4,6,8}

1. A ∩ B = ∅ (conjunto vacio, porque A y B no tienen elementos en común)
2. (A ∩ B)' = (∅)' = U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
3. A’ = {2,4,6,8,9,10}
4. B’ = {1, 3, 5, 7, 9, 10}
5. A' ∪ B': {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} = U

Como se puede ver, (A ∩ B)' = A' ∪ B', confirmando así la segunda ley de De Morgan.

## 1.5 Producto Cartesiano:

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B (denotado como A x B) es el conjunto de todos los pares ordenados (a,b) donde a ∈ A y b ∈ B. Formalmente:

* A × B = {(a, b) | a ∈ A ∧ b ∈ B}

Propiedades:

* Si A tiene m elementos y B tiene n elementos, entonces A x B tiene m x n elementos
* En general, A x B ≠ B x A (a menos que A = B)
* (A x B) x C ≠ A x (B x C)

El producto cartesiano entre conjuntos A y B (denotado A x B) esta formado por todos los pares ordenados (a,b) donde a ∈ A y b ∈ B. La característica clave es que son **“pares ordenados”,** lo que significa que el orden importa: (a,b) ≠ (b,a) a menos que a = b.

**Propiedades:**

1. **Cardinalidad:** Como ya se mencionó, si |A| = m y |B| = n, entonces |A x B| = m x n.
2. **No conmutatividad:** A × B ≠ B × A (a menos que A = B o alguno sea vacío). Los conjuntos contienen los mismos elementos, pero como pares ordenados diferentes.
3. **Asociatividad:** (A × B) × C ≅ A × (B × C), donde "≅" significa "isomorfo a". Técnicamente, (A × B) × C contiene elementos de la forma ((a,b),c), mientras que A × (B × C) contiene elementos (a,(b,c)).
4. **Distributividad:** A × (B ∪ C) = (A × B) ∪ (A × C)
5. **Conjunto vacío:** Si A = ∅ o B = ∅, entonces A × B = ∅

**Algunos Ejemplos:**

**Ejemplo 1:**

Si A = {1,2} y B={a,b,c}, entonces:  
A × B = {(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)}

**Ejemplo 2:**

B × A = {(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)}

**Aplicaciones**

1. **Plano cartesiano:** El plano ℝ² es el producto cartesiano ℝ x ℝ, donde cada punto (x,y) representa un par ordenado.
2. **Relaciones binarias:** Una relación binaria R entre conjuntos A y B es un subconjunto del producto cartesiano A x B.
3. **Funciones:** Una función f:A → puede definirse como un subconjunto especial de A x B donde cada elemento de A aparece exactamente una vez como primera componente.
4. **Espacio de probabilidad:** En probabilidad, el espacio muestral para múltiples experimentos suele ser el producto cartesiano de los espacios muestrales individuales.
5. **Productos cartesianos múltiples:**

Se pueden extender a más de dos conjuntos: A₁ × A₂ × ... × Aₙ contiene n-tuplas ordenadas (a₁, a₂, ..., aₙ).

Visualización de producto cartesiano A x B donde:

* A = {1,2,3}
* B = {a,b,c,d}

B

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A | B | C | D |
| (1,a) | (1,b) | (1,c) | (1,d) |
| (2,a) | (2,b) | (2,c) | (2,d) |
| A(3,a) | (3,b) | (3,c) | (3,d) |
|  |  |  |  |

* A × B = {(a, b) | a ∈ A ∧ b ∈ B}

|A x B| = |A| x |B| = 3 x 4 = 12 elementos

1. Los elementos del conjunto A aparecen como filas
2. Los elementos del conjunto B aparecen como columnas
3. Cada celda de la matriz representa un par ordenado (a,b)

Cada par ordenado mantiene la información sobre “que elemento viene de que conjunto”:

1. El primer componente siempre viene del conjunto A
2. El segundo componente siempre viene del conjunto B

La cardinalidad (numero total de elementos) en el producto cartesiano es:

1. |A x B| = |A| x |B| = 3x4 = 12 elementos

## Cardinalidad de Conjuntos:

### Cardinalidad de Conjuntos Finitos

La cardinalidad o tamaño de un conjunto finito A (denotado como |A| o #A) es el número de elementos distintos en A:

**Propiedades fundamentales**

1. **Conjunto vacío:** |∅| = 0

* El conjunto vacío no contiene elementos, por lo tanto su cardinalidad es cero

1. **Principio de inclusión-exclusión:** |A ∪ B| = |A| + |B| - |A ∩ B|

Esta formula nos permite calcular la cardinalidad de la unión de dos conjuntos

Debemos restar la intersección para no contar dos veces los elementos comunes

Ejemplo: Si A = {1,2,3} y B = {3,4,5}, entonces |A ∪ B| = 3 + 3 - 1 = 5

1. **Relación de subconjuntos: Si A ⊆ B, entonces |A| ≤ |B|**

Si un conjunto es subconjunto de otro, su cardinalidad será menor o igual

La igualdad se da cuando A = B

**Propiedades Adicionales:**

**1 Conjunto de partes:** Si P(A) es el conjunto potencia de A, entonces |P(A)| = 2^|A|

* El conjunto potencia contiene todos los subconjuntos posibles
* Ejemplo: Si A = {a, b}, entonces P(A) = {∅, {a}, {b}, {a, b}} y |P(A)| = 2^2 = 4

1. **Producto Cartesiano:** |A x B| = |A| \* |B|

* El numero de pares ordenados en el producto cartesiano es el producto de las cardinalidades
* **Ejemplo:** Si A = {1,2} y B = {a,b,c}, entonces |A x B| = 2 \* 3 = 6

1. **Principio de inclusión-exclusion generalizado:** Para n conjuntos: |A₁ ∪ A₂ ∪ ... ∪ Aₙ| = ∑|Aᵢ| - ∑|Aᵢ ∩ Aⱼ| + ∑|Aᵢ ∩ Aⱼ ∩ Aₖ| - ... + (-1)^(n-1)|A₁ ∩ A₂ ∩ ... ∩ Aₙ|
2. **Cardinalidad del conjunto diferencia:** |A - B| = |A| - |A ∩ B|

* Nos permite calcular cuantos elementos tiene A que no están en B

1. **Cardinalidad de la unión disjunta:** Si A ∩ B = ∅, entonces |A ∪ B| = |A| + |B|

* Cuando los conjuntos no tienen elementos en común, solo sumamos las cardinalidades.

### Cardinalidad de Conjuntos Infinitos

Cuando hablamos de conjuntos infinitos, la idea simple de "contar elementos" que usamos para conjuntos finitos ya no es suficiente. Para comparar el tamaño de conjuntos infinitos, necesitamos un concepto más sofisticado, que es donde entra la **equipotencia** o **correspondencia biyectiva**.

Entonces usamos otra forma de comparar los tamaños de x conjunto

**Solución:** Correspondencia biyectiva (o equipotencia)

Una correspondencia biyectiva significa que podemos emparejar exactamente cada elemento de un conjunto con un elemento del otro conjunto, sin que sobre ninguno.

* Conjunto A = {1,2,3}
* Conjunto B = {a,b,c}

Se puede crear una correspondencia: 1→a, 2 →b, 3→c  
Se demuestra que A y B tienen la misma cardinalidad (3 elementos cada uno)

**Aplicado a los conjuntos infinitos**

Ahora, con los conjuntos infinitos se usa el mismo principio

* Dos conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad si podemos establecer una correspondencia biyectiva entre ellos.

#### **1.6.2.1 Conjuntos Numerables (cardinalidad ℵ₀)**

Un conjunto es numerable si podemos hacer una correspondencia biyectiva con los números naturales (1,2,3,4, …)

Ejemplo detallado con los números enteros (ℤ)

* ℤ = {…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}
* ℕ = {1,2,3,4,5, …}

Usamos este esquema para emparejarlos:

1. El 0 se empareja con 1
2. El 1 se empareja con 2
3. El -1 se empareja con 3
4. E 2 se empareja con 4
5. El -2 se empareja con 5

Así:

* 0 → 1
* 1 → 2
* -1 → 3
* 2 → 4
* -2 → 5
* 3 → 6
* -3 → 7

Cada numero entero tiene exactamente un numero natural correspondiente, y cada numero natural correspondiente, y cada numero natural tiene exactamente un numero entero correspondiente. Esto demuestra que ℤ tiene la misma cardinalidad que ℕ, que llamamos ℵ₀ (se lee “Aleph-cero”).

**¿Qué otros conjuntos que tienen cardinalidad ℵ₀?**

Los números racionales (todas las fracciones) también tienen cardinalidad ℵ₀.

Se puede demostrar usando el “metodo de la diagonal” de Cantor:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1/1 | ½ | 1/3 | ¼ | … |
| 2/1 | 2/2 | 2/3 | 2/4 | … |
| 3/1 | 3/2 | 3/3 | ¾ | … |
| 4/1 | 4/2 | 4/3 | 4/4 | … |

Se sigue un camino en diagonal:

* Se empieza con 1/1
* Seguimos con ½, 2/1
* Luego 3/1, 2/2, 1/3
* Y así sucesivamente

Saltándonos las fracciones equivalentes (por ejemplo, 2/2 = 1/1), podemos enumerar todas las fracciones positivas.

Finalmente, alternamos entre positivos y negativos para cubrir todos los racionales.

Se demuestra que ℚ también tiene cardinalidad ℵ₀.

#### **1.6.2.2 Conjuntos No Numerables**

¿Existen conjuntos infinitos “más grandes” que los numerables?  
La respuesta es Si, y el ejemplo mas conocido es el conjunto de los números reales (ℝ).

**Demostración de que R no es numerable:**

1. Suponer que los números reales entre 0 y 1 fueran numerables
2. Entonces podríamos listarlos todos en una secuencia infinita:

Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

donde cada aᵢⱼ es un dígito del 0 al 9.

Ahora construimos un nuevo número r = 0.b₁b₂b₃... donde:

* b₁ es cualquier dígito diferente de a₁₁
* b₂ es cualquier dígito diferente de a₂₂
* b₃ es cualquier dígito diferente de a₃₃
* Y así sucesivamente…

Este número r es diferente de todos los números en nuestra lista:

* Difiere de r₁ en el primer dígito decimal
* Difiere de r₂ en el segundo dígito decimal
* Difiere de r₃ en el tercer dígito decimal

Por lo tanto, r no esta en nuestra lista, contradiciendo la suposicion de que se había llegado listado todos los números relaes entre 0 y 1.

Esta es la “demostración por diagonal” de Cantor, y demuestra que el conjunto de los números relaes tiene una cardinalidad mayor que ℵ₀. La cardinalidad se denota por 2^ℵ₀ o ℵ (la cardinalidad del continuo)

#### **1.6.2.3 Teorema de Cantor: Para cualquier conjunto A, |A| < |P(A)|**

El conjunto potencia P(A) es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de A.

Por ejemplo:

* Si A = {1,2,3}. Entonces:
* P(A) = {∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}}

El teorema de Cantor nos dice que para cualquier conjunto A, la cardinalidad de P(A) es estrictamente mayor que la cardinalidad de A.

Esto significa que:

* Si |ℕ| = ℵ₀
* Entonces |P(ℕ)| = 2^ℵ₀ > ℵ₀

Esto nos demuestra que hay infinitos “mas grandes” que otros infinitos, creando una jerarquía infinita de tamaños de infinito

**Resumen en términos simples**

**Conjuntos finitos:** Tienen un numero especifico de elementos

**Conjuntos numerables:** Tienen tantos elementos como números naturales ((ℵ₀).

**Conjuntos no numerables:** Tienen mas elementos que los números naturales (como los números reales)

## Teoría de Conjuntos Axiomática:

### 1.7.1 Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF)

Surgió como respuesta a las paradojas descubiertas a principios del siglo XX, especialmente la paradoja de Russell. Esta paradoja, formulada por Bertrand Russell en 1901, **se refiere al conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos, lo que genera una contradicción lógica.**

**Un poco de contexto histórico:**

A principios del siglo XX, la teoría de conjuntos desarrollada por Georg Cantor enfrentaba serios problemas lógicos. La ingeniosa pero problemática definición de conjuntos permitía construcciones que conducían a contradicciones fundamentales.

**La Paradoja de Russell: Origen de la Crisis**

**Formulación de la Paradoja**

La paradoja de Russell se puede expresa de la siguiente manera:

Considere el conjunto R definido como: *"el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos"*.

**La pregunta crítica es: ¿El conjunto R se contiene a sí mismo?**

* Si R se contiene a sí mismo, entonces por definición NO debería contenerse.
* Si R NO se contiene a sí mismo, entonces SÍ debería contenerse.

Esta construcción lógica genera una contradicción irresoluble, demostrando un problema fundamental en la teoría de conjuntos ingenua.

**Ejemplo Ilustrativo**

Sea:

* A = {1, 2, 3} (un conjunto normal)
* B = {a, b, c} (otro conjunto normal)
* R = {conjunto | conjunto NO se contiene a sí mismo}

¿R pertenece a R? Si sí, no debería. Si no, entonces sí debería.

**Solución: Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel**

**Axiomas Principales:**

1. **Axioma de Extensionalidad:** Dos conjuntos son iguales si y solo si tienen exactamente los mismos elementos.
2. **Axioma de Separación (Comprehension Restringido):** Evita conjuntos definidos por propiedades arbitrarias que puedan generar paradojas.
3. **Axioma de Conjunto Potencia:** Permite crear conjuntos de todos los subconjuntos de un conjunto dado.
4. **Axioma de Infinito:** Garantiza la existencia de conjuntos infinitos.
5. **Axioma de Reemplazo:** Permite crear nuevos conjuntos mediante transformaciones de otros.

**Restricciones Fundamentales:**

* No se permiten definiciones de conjuntos que conduzcan a contradicciones lógicas.
* Se establece una jerarquía estricta en la formación de conjuntos.
* Se prohíben conjuntos "autorreferentes" o recursivos que puedan generar paradojas.

Los axiomas forman la base formal de las matemáticas modernas:

#### **1.7.1.1 Axioma de Extensionalidad:**

Dos conjuntos son iguales si y solo si tienen los mismos elementos.

**Formalmente:** ∀A∀B(∀x(x∈A ↔ x∈B) → A=B).

**Lectura:** “Para todo conjunto A y para todo conjunto B si para todo elemento x, x pertenece a A si y solo si x pertenece a B, entonces A es igual a B

**Ejemplos:**

1. **Orden irrelevante:** A = {1,2,3} y B ={3,1,2} son iguales, pues contienen exactamente los mismos elementos.
2. **Representaciones alternativas:** C = {x ∈ ℕ ∣ x < 4} y D = {1,2,3} son iguales por extensionalidad, aunque estén definidos de manera diferente.
3. **Conjuntos definidos por propiedades distintas:** E = {x ∈ ℤ | x² =4 } y F = {-2,2} son el mismo conjunto.
4. **Unicidad del conjunto vacío:** Si A = {} y B = ∅, entonces A = B por extensionalidad, pues ambos no contienen elementos
5. **Conjuntos con notación matemática diferente:** G = {x | x es un divisor positivo de 6} y H = {1,2,3,6} son iguales.
6. **Identificación por compresión:** I = {x ∈ ℕ | x es par y x < 10} y J = {2, 4, 6, 8} son iguales.
7. **Diferentes definiciones, mismo contenido:** K = {x ∈ ℝ | x² - 1 = 0} y L = {-1, 1} son iguales.
8. **Expresiones Algebraicas equivalentes =** M = {x ∈ ℝ | x² = 9} y N = {x ∈ ℝ | |x| = 3} son idénticos
9. **Pertenencia mutua**: si todo elemento de A pertenece a B y todo elemento de B pertenece a A, entonces A = B
10. **Conjuntos definidos por graficas:** El conjunto de puntos {(x,y) | y = x²} y {(x,y) | x = √y, y ≥ 0} definen el mismo conjunto de pares ordenados.
11. **Intervalos equivalentes:** [0,1] ∩ ℚ = {x ∈ ℚ | 0 ≤ x ≤ 1} son iguales.
12. **Sistemas de ecuaciones:** El conjunto solución de {x + y = 2m x-y=0} son idénticos
13. **Subconjuntos mutuos:** Si A ⊆ B y B ⊆ A, entonces A = B por extensionalidad.
14. **Conjuntos con repeticiones aparentes:** {a, a, b, c} = {a, b, c} pues en teoría de conjuntos no hay repetición de elementos.
15. **Soluciones a ecuaciones:** Conjunto de soluciones de x² + 2x + 1 = 0 y conjunto {-1} son iguales.
16. **Equivalencia lógica:** {x | P(x)} = {x | Q(x)} si las propiedades P y Q son lógicamente equivalentes.
17. **Definiciones recursivas:** El conjunto {0, 1, 2, 3} y {n ∈ ℕ | n < 4} representan el mismo conjunto.
18. **Conjuntos de conjuntos:** {{1}, {2}, {3}} = {{3}, {1}, {2}} por extensionalidad.
19. **Números racionales equivalente:** El conjunto {1/2, 2/4, 3/6} = {1/2} pues todos representan el mismo valor racional.
20. **Expresiones con distintas variables:** {(x,y) | x + y = 10} = {(a,b) | a + b = 10} pues refieren al mismo conjunto de pares ordenados.

#### **1.7.1.2 Axioma de Especificación (o Separación)**

**Definición:** Dado un conjunto A y una propiedad P, existe un conjunto B que contiene exactamente los elementos de A que satisfacen P.

**Formalmente:** ∀A∃B∀x(x∈B ↔ x∈A ∧ P(x))  
**Lectura:** Para todo conjunto A, existe un conjunto B tal que, para todo x, x pertenece a B si y solo si x pertenece a A y P(x) es verdadero.  
P(x): propiedad P aplicada a x.

**Ejemplos:**

1. **Conjunto de números pares:** Dado ℕ y la propiedad “x es par”, podemos formar B = {x ∈ ℕ | x es par}
2. **Conjunto de números primos:** Dado ℕ y la propiedad “x es primo”, formamos el conjunto de todos los números primos.
3. **Conjunto de números negativos:** Dado Z y la propiedad “x <0”, formamos el conjunto de Z de enteros negativos
4. **Elementos mayores que un umbral:** Dado A = {1,2,3,4,5}y P: “x > 3”, obtenemos B = {4,5}
5. **Filtrado por divisibilidad:** Dado A = {1,2,3,4,5,6} y P: “x es divisible por 2”, obtenemos B = {2,4,6}
6. **Conjunto de matrices invertibles:** Dado el conjunto de todas las matrices n \* n y la propiedad det(A) ≠ 0", obtenemos el conjunto de matrices invertibles.
7. **Conjunto de números irracionales:** Dado ℝ y la propiedad "x ∉ ℚ", formamos el conjunto de números irracionales.
8. **Conjunto de funciones continuas:** Dado el conjunto de todas las funciones f:ℝ→ℝ y la propiedad "f es continua", obtenemos el conjunto de funciones continuas.
9. **Conjunto de triángulos equiláteros:** Dado el conjunto de todos los triángulos y la propiedad "todos los lados son iguales", obtenemos el conjunto de triángulos equiláteros.
10. **Conjunto de números perfectos:** Dado ℕ y la propiedad "x es un número perfecto", obtenemos {6, 28, 496, ...}.
11. **Conjunto de puntos interiores:** Dado un conjunto A en un espacio topológico y la propiedad "x es punto interior de A", obtenemos el interior de A.
12. **Conjunto de soluciones:** Dado ℝ² y la propiedad "x² + y² = 1", obtenemos los puntos del círculo unitario.
13. **Conjunto de elementos máximos:** Dado un conjunto ordenado A y la propiedad "no existe y∈A tal que x < y", obtenemos los elementos máximos.
14. **Conjunto de números transfinitos:** Dado el conjunto de todos los ordinales y la propiedad "x ≥ ω", obtenemos los ordinales transfinitos
15. **Conjunto de funciones inyectivas:** Dado el conjunto de todas las funciones f:A→B y la propiedad "f es inyectiva", obtenemos el conjunto de funciones inyectivas.
16. **Conjunto de polinomios irreducibles:** Dado el conjunto de polinomios sobre un campo K y la propiedad "p es irreducible", obtenemos los polinomios irreducibles.
17. **Conjunto de grupos abelianos:** Dado el conjunto de todos los grupos y la propiedad "G es abeliano", obtenemos los grupos abelianos.
18. **Conjunto de números trascendentes:** Dado ℝ y la propiedad "x no es algebraico", obtenemos el conjunto de números trascendentes.
19. **Conjunto de secuencias convergentes:** Dado el conjunto de todas las secuencias de números reales y la propiedad “la secuencia converge”, obtenemos el conjunto de secuencias convergentes.
20. **Conjunto de vectores ortogonales:** Dado un conjunto V de vectores y un vector fijo v, con la propiedad “x\*v = 0” (producto escalar nulo), obtenemos el conjunto de vectores ortogonales a v.

#### **1.7.1.3 Axioma de Apareamiento**

**Definición:** Para cualesquiera dos conjuntos a y b, existe un conjunto {a,b} que los contiene como elementos.  
a y b son considerados como conjuntos (u objetos matemáticos) por si mismos, pero en este contexto están funcionando como elementos dentro del nuevo conjunto {a,b}.  
Para ilustrarlo:

* Si a = {1,2,3} y b= {4,5}
* Entonces {a,b} = {{1,2,3},{4,5}}

Notar que {a,b} no es {1,2,3,4,5}, sino un conjunto que contiene dos elementos, donde cada elementos es a su vez un conjunto.

Es como tener dos cajas separas (los conjuntos a y b) y luego crear una caja mas grande que contiene estas dos cajas (el conjunto {a,b})

En la teoría de conjuntos, los objetos matemáticos se representan como conjuntos, por lo que a y b son conjuntos, pero en el contexto del conjunto {a,b}, están actuando como elementos individuales de este nuevo conjunto.  
**Formalmente:** ∀a∀b∃C∀x(x∈C ↔ x=a ∨ x=b).  
**Se lee:** Para todo a, para todo b, existe un conjunto C tal que para todo x, x pertenece a C si y solo si x es igual a a o x es igual a b.

**Desglosado por partes:**

* **∀a∀b:** “Para todo a, para todo b”
* **∃C:** “Existe un conjunto C”
* **∀a:** “Para todo x”
* **(x∈C ↔ x=a ∨ x=b):** "x pertenece a C si y solo si x es igual a a o x es igual a b"

**Ejemplos:**

1. **Pareja de números:** Para a=3 y b=7, el axioma garantiza la existencia del conjunto {3,7}
2. **Pareja con repetición:** Para a=5 y b=5, el axioma garantiza la existencia del conjunto {5}. (Por extensionalidad, {5,5} = {5})
3. **Par ordenado:** Para definir el par ordenado (a,b) como {{a}, {a,b}}, primero necesitamos que exista {a,b}, lo cual garantiza este axioma.
4. **Singletons:** Para a y b=a, el axioma garantiza la existencia del conjunto {a}, esencial para construir la teoría de conjuntos.
5. **Relación binaria básica:** El conjunto {(1,2), (2,3)} se construye a partir de pares que necesitan del axioma de apareamiento.
6. **Construcción de grafos:** Un grafo G con dos vértices a y b se puede representar como G = ({a,b}, {(a,b)}), donde {a,b} es el conjunto de vértices.
7. **Relaciones de equivalencia:** Para construir clases de equivalencia [a] = {x | x ~ a}, necesitamos poder formar pares (a,x) que satisfacen la relación ~.
8. **Operaciones binarias:** Para definir una operación binaria a \* b, necesitamos la existencia del par (a,b,a\*b).
9. **Isomorfismos entre espacios:** Para establecer un isomorfismo f:X→Y, formamos pares (x,f(x)) para cada x∈X.
10. **Conjunto potencia con un elemento:** P({a}) = {∅, {a}}, donde {a} existe por el axioma de apareamiento.
11. **Definición de producto cartesiano:** A × B se define a partir de pares ordenados (a,b), que a su vez necesitan {a,b} para su construcción.
12. **Formación de secuencias:** Una secuencia finita (a₁, a₂, ..., aₙ) se construye a partir de pares ordenados.
13. **Relación de orden parcial:** Para definir una relación ≤, formamos pares (a,b) donde a ≤ b.
14. **Función característica:** Para un conjunto A, su función característica χₐ se define a partir de pares (x,1) si x∈A y (x,0) si x∉A.
15. **Composición de funciones:** Para definir (f∘g)(x) = f(g(x)), necesitamos construir pares (x,f(g(x))).
16. **Restricción de una función:** Para f|ₐ (restricción de f a A), formamos pares (x,f(x)) para cada x∈A.
17. **Función biyectiva:** Una biyeccion se representa mediante pares (a,b) donde cada a∈A se asocia con un único b∈B.
18. **Productos en algebra relacional:** Para dos relaciones R y S, su producto RxS usa pares ((a,b),(c,d))
19. **Arboles binarios:** Un árbol binario simple con dos nodos a y b puede representarse como ({a,b}, {(a,b)}).
20. **Digrafo simple:** Un digrafo con dos vértices a y b, con arista dirigida de a a b, se representa como ({a,b}, {(a,b)}).

#### **1.7.1.4 Axioma de Unión**

**Definición:** Para cualquier conjunto de conjuntos, existe un conjunto que contiene todos los elementos de esos conjuntos.   
**Formalmente:** ∀F∃A∀y(y∈A ↔ ∃B(B∈F ∧ y∈B)).  
**Se lee:** Para todo conjunto F, existe un conjunto A tal que para todo y, y pertenece a A si y solo si existe algún conjunto B tal que B pertenece a F y y pertenece a B  
**Desglosados por partes:**

* **∀F:** “Para todo conjunto F”
* **∃A:** “Existe un conjunto A”
* **∀y:** “Para todo y”
* **(y∈A ↔ ∃B(B∈F ∧ y∈B)):** "y pertenece a A si y solo si existe algún conjunto B tal que B pertenece a F y y pertenece a B"

En términos mas sencillos, esto describe el Axioma de Union, que nos dice que dado cualquier colección de conjuntos F, podemos formar un nuevo conjunto A que contiene todos los elementos que aparecen en cualquiera de los conjuntos de F.

Por ejemplo, si F = {{1, 2}, {2, 3, 4}, {5}}, entonces A = {1, 2, 3, 4, 5}.

**Ejemplos:**

1. **Unión de conjuntos disjuntos:** Para A = {1,2} y B = {3,4}, la unión A ∪ B = {1,2,3,4.
2. **Unión de conjuntos con intersección:** Para C = {1,2,3} y D ={3,4,5}, la unión C ∪ D = {1,2,3,4,5}
3. **Unión de una familia infinita:** Para la familia F = {{1},{1,2},{1,2,3}, …}, la unión ∪F = ℕ. (es la unión de todos los conjuntos dentro de la familia F)
4. **Aplanamiento de conjuntos anidados:** Para G = {{1,2}, {3,4,5}}, la unión ∪G = {1,2,3,4,5}
5. **Unión con conjunto vacío:** Para A = {1,2,3} y B =∅, la unión A ∪ B = A.
6. **Unión de conjuntos anidados:** Para H = {A,B,C} donde A⊂B⊂C, la unión UH = C
7. **Unión de intervalos:** Para la familia I = {[0,1], [1,2], [2,3]}, la unión ⋃I = [0,3].
8. **Unión de subespacios:** Para subespacios vectoriales U, V,W, la unión ⋃{U,V,W} contiene todos los vectores de U, V y W.
9. **Unión de particiones:** Para una partición P={P1,P2,…,Pn} de un conjunto X, la unión UP = X
10. **Unión de vecindades:** Para un punto x en un espacio topológico y la familia de todas sus vecindades N(x), la unión ⋃N(x) es el espacio completo.
11. **Union de cerrados:** Para una familia de conjuntos cerrados F en una topología, la unión ⋃F puede no ser cerrada.
12. **Unión de abiertos:** Para una familia de conjuntos abiertos G en una topología, la unión UG es abierta.
13. **Unión de σ-álgebras:** Para σ-álgebras A₁, A₂, ..., la unión ⋃{A₁, A₂, ...} no es necesariamente una σ-álgebra.
14. **Union de conjuntos numerables:** Para una familia numerable de conjuntos numerables {C₁, C₂, ...}, la unión ⋃{C₁, C₂, ...} es numerable.
15. **Construcción de espacios topológicos:** Una topología T sobre X se define como una familia de subconjuntos de X tal que UT = X.
16. **Union de clases de equivalencia:** Para una relación de equivalencia sobre X, la unión de todas las clases de equivalencia es X.
17. **Construcción de esquemas algebraicos:** Un esquema algebraico se construye como la unión de espectros afines.
18. **Unión de cubiertas:** Para una cubierta abierta {Uᵢ} de un espacio topológico X, la unión ⋃{Uᵢ} = X.
19. **Unión de filtros:** Para una familia de filtros {Fᵢ} sobre un conjunto X, la unión ⋃{Fᵢ} puede no ser un filtro.
20. **Unión de cadenas:** Para una cadena de conjuntos C₁ ⊂ C₂ ⊂ C₃ ⊂ ..., la unión ⋃{C₁, C₂, C₃, ...} es el supremo de la cadena.

**Nota:**

En teoría de conjuntos, una “familia” (también llamada “colección” o “sistemas de conjuntos”) es solo un conjunto cuyos elementos son a su vez conjuntos.

Por ejemplo:

* F = {{1,2},{3,4},{5,6} es una familia que contiene tres conjuntos.
* G = {{a},{b,c},{d,e,f},∅} es una familia que contiene cuatro conjuntos.

Una familia puede ser:

1. **Finita:** Contiene un numero finito de conjuntos
2. **Infinita:** Contiene infinitos conjuntos (como en el ejemplo que mencionaste)
3. **Indexada:** Cuando sus elementos se identifican mediate un índice, como F = {Aᵢ : i ∈ I}

#### **1.7.1.5 Axioma de Potencia**

**Definición:** Para cualquier conjunto A, existe el conjunto potencia P(A) que contiene todos los subconjuntos de A.  
**Formalmente:** ∀A∃P∀x(x∈P ↔ x⊆A).  
**Se lee:** “Para todo A, existe un P, tal que para todo x, x pertenece a P si y solo si x es subconjunto de A”.

**Ejemplos:**

1. **Conjunto potencia finito:** Para A = {a,b}, el conjunto potencia P(A) = { ∅, {a},{b},{a,b}}.
2. **Conjunto potencia del vacío:** P(∅) = {∅}, pues el vacío solo tiene un subconjunto: él mismo.
3. **Cardinalidad de la potencia:** Para un conjunto A con n elementos, P(A) tiene 2ⁿ elementos.
4. **Conjunto potencia de un singleton:** Para A = {a}, P(A) = {∅, {a}}.
5. **Conjunto de todas las relaciones:** Entre conjuntos A y B, el conjunto de todas las relaciones posibles es P(A×B).
6. **Conjunto de todas las funciones:** El conjunto de todas las funciones f:A→{0,1} se corresponde con P(A).
7. **Álgebra de Boole:** (P(A), ∪, ∩, ', ∅, A) forma un álgebra de Boole completa.
8. **Espacio de medida:** En teoría de la medida, una σ-álgebra es un subconjunto de P(X).
9. **Topologías:** Cualquier topología sobre X es un subconjunto de P(X).
10. **Propiedades de inclusión:** A ⊆ B si y solo si P(A) ⊆ P(B).
11. **Iteración del operador potencia:** P(P(A)) es el conjunto de todos los conjuntos de subconjuntos de A.
12. **Potencia infinita:** Para un conjunto infinito X, P(X) tiene cardinalidad estrictamente mayor (teorema de Cantor).
13. **Álgebra de conjuntos:** P(X) con las operaciones ∪, ∩, \ forma un álgebra de conjuntos.
14. **Operaciones en potencia:** P(A∪B) = {S∪T | S∈P(A), T∈P(B)}.
15. **Construcción de números reales:** Los cortes de Dedekind son subconjuntos de ℚ, por lo que ℝ ⊆ P(ℚ).
16. **Espacio de probabilidad:** Un espacio de probabilidad se define sobre una σ-álgebra F ⊆ P(Ω).
17. **Retículos completos:** (P(X), ⊆) es un retículo completo.
18. **Espacio de Stone:** Para un álgebra de Boole B, existe un espacio topológico X tal que B es isomorfa a un subálgebra de P(X).
19. **Iteración transfinita:** La jerarquía acumulativa de von Neumann se construye utilizando iteradamente el operador potencia.
20. **Teoría de categorías:** La categoría de conjuntos y funciones tiene una propiedad universal respecto a P(X).

#### **1.7.1.6 Axioma de Infinito**

**Definición:** Existe un conjunto infinito.   
**Formalmente:** existe un conjunto X tal que ∅∈X y para cada y∈X, también (y∪{y})∈X.

**Ejemplos:**

1. **Números naturales:** El axioma garantiza la existencia de un conjunto que puede modelar los números naturales como: ∅, {∅}, {∅, {∅}}, etc.
2. **Conjunto de los ordinales finitos:** {0, 1, 2, 3, ...} donde 0=∅, 1={0}, 2={0,1}, etc.
3. **Conjunto infinito numerable: ℕ** es el conjunto infinito más pequeño garantizado por este axioma.
4. **Conjunto de los racionales positivos:** ℚ⁺ se puede construir como pares de naturales, gracias a la existencia de ℕ.
5. **Construcción de ℤ:** Los enteros se pueden definir como clases de equivalencia de pares ordenados de naturales.
6. **Secuencias infinitas:** El conjunto de todas las secuencias infinitas a₁, a₂, a₃, ... de elementos de un conjunto A.
7. **Puntos fijos de funciones:** Ciertos teoremas de punto fijo requieren conjuntos infinitos.
8. **Espacio de Hilbert:** La existencia de espacios de Hilbert de dimensión infinita.
9. **Espacio de sucesiones l²:** El espacio de sucesiones de cuadrado sumable.
10. **Modelo estándar de aritmética:** La existencia de un modelo para los axiomas de Peano.
11. **Conjunto de polinomios:** El conjunto de todos los polinomios con coeficientes en un campo.
12. **Clausura algebraica:** La clausura algebraica de un campo puede requerir un conjunto infinito.
13. **Teoría de Galois:** El estudio de extensiones infinitas de campos.
14. **Funciones analíticas:** El espacio de funciones analíticas en un dominio.
15. **Series de Fourier:** La representación de funciones mediante series infinitas.
16. **Teoría de la computabilidad:** El conjunto de todas las funciones computables sobre los naturales.
17. **Jerarquía de conjuntos transfinitos:** Los ordinales transfinitos forman un conjunto infinito.
18. **Cardinalidad creciente:** La secuencia de cardinalidades ℵ₀, ℵ₁, ℵ₂, ... requiere conjuntos infinitos.
19. **Modelado de procesos infinitos:** Las cadenas de Markov infinitas utilizan conjuntos infinitos.
20. **Espacios de Banach:** La existencia de espacios de Banach de dimensión infinita.

#### **1.7.1.7 Axioma de Reemplazo**

Si tienes una función f y un conjunto A, entonces la imagen de A bajo f también es un conjunto.

**Definición:** Si f es una función, entonces la imagen de un conjunto bajo f es también un conjunto. Formalmente, si para cada x existe un único y tal que P(x,y), entonces para cualquier conjunto A, existe un conjunto B = {y | ∃x∈A : P(x,y)}.

Mas formalmente, la definición establece:

* Si f es una función
* Para cada x en el conjunto original, existe una y única tal que P(x,y)
* Entonces para cualquier conjunto A, existe un conjunto B = {y | ∃x∈A : P(x,y)}}

Se lee: “B es el conjunto de todos los y, tal que existe un x en A, tal que P(x,y) se cumple”

Desglosándolo:

Ejemplo concreto:

Supon que A = {1,2,3} y P(x,y) significa “y es el doble de x”  
Entonces B seria {2,4,6}, porque:

* Existe 1 en A tal que su doble es 2
* Existe 2 en A tal que su doble es 4
* Existe 3 en A tal que su doble es 6

Y simplemente es el resultado de aplicar una función f a x.  
Así que P(x,y) se convierte en “y = f(x)”.  
Por ejemplo:

* Si f(x) = x², entonces y = x²
* Si f(x) = x +1, entonces y=x+1
* Si f(x) = ex, entonces y = 2x

**Para entender P(x,y)  
P(x,y):** Es un predicado que representa una relación o condición entre dos variables x e y.  
Imagina P(x,y) como una “condición” o una “relación” donde:

* X puede ser un elemento de un conjunto inicial
* Y es un elemento que esta relacionado con x mediante alguna regla o función

**Ejemplos concretos:**

1. **Con una función matemática simple:**
   1. Sea f(x) = x²
   2. P(x,y) podría significa “y es el cuadrado de x”
   3. Entonces P(2,4) seria verdadero
   4. P(2,5) seria falso
2. **Otro ejemplo**
   1. Si tenemos el conjunto de números naturales
   2. P(x,y) podría significar “y es el sucesor de x”
   3. P(3,4) seria verdadero
   4. P(3,5) seria falso
3. **Un ejemplo mas abstracto**
   1. En un conjunto de personas
   2. P(x,y) podría significar “y es el padre de x”
   3. P(Juan, Maria) podría ser verdadero si Maria es padre de Juan

Como se lee:  
En lógica matemática, P(x,y) se lee formalmente como:  
“P de x,y” o “El predicado P para x e y”  
Donde:

1. P es un predicado (una función que devuelve un valor de verdad)
2. X e y son variables
3. La notación P(x,y) significa que existe una relación o condición entre x e y que puede ser verdadera o falsa.

Algunos ejemplos de cómo se leería:

* Si P(x,y) representa “x es menor que y”, se leería: “P de x,y” o “x es menor que y”
* Si P(x,y) representa “y es el cuadrado de x”, se leería: “P de x,y” o “y es el cuadrado de x”

**Ejemplos:**

1. **Imagen de una función:** Para f:A→B, la imagen f(A) = {f(x) | x∈A} es un conjunto.
2. **Cardinalidad de imágenes:** Si A es un conjunto y f es inyectiva, entonces |f(A)| = |A|.
3. **Ordinales grandes:** La construcción de ordinales más allá de los garantizados por otros axiomas.
4. **Cardinales inaccesibles:** La existencia de cardinales inaccesibles requiere el axioma de reemplazo.
5. **Límites de secuencias ordinales:** Para una secuencia de ordinales α₁ < α₂ < ..., el límite sup{α₁, α₂, ...} es un ordinal.
6. **Suma transfinita:** Para una familia de ordinales {αᵢ | i∈I}, la suma Σᵢ∈I αᵢ es un ordinal.
7. **Recursión transfinita:** Definiciones recursivas sobre ordinales arbitrarios.
8. **Jerarquía acumulativa V\_α:** La construcción de V\_α para α arbitrariamente grande.
9. **Modelos internos:** La construcción L de Gödel de conjuntos constructibles.
10. **Operaciones con clases propias:** Convertir ciertas clases propias en conjuntos cuando se restringen adecuadamente.
11. **Teoría de tipos:** Construcción de tipos de orden superior en teoría de tipos.
12. **Construcción de ultra potencias:** Para modelos no estándar de aritmética.
13. **Teoría de categorías grandes:** La existencia de categorías como la categoría de todas las categorías pequeñas.
14. **Funtores adjuntos:** La imagen de un funtor adjunto en categorías grandes.
15. **Recursión de von Neumann:** Definición recursiva de funciones sobre todos los ordinales.
16. **Construcciones transfinitas:** Permitir construcciones que avanzan a través de todos los ordinales.
17. **Ordinales no numerables:** La existencia del primer ordinal no numerable ω₁.
18. **Rango de von Neumann:** Asignar un ordinal rango(x) a cada conjunto x.
19. **Universos de Grothendieck:** Construcción de universos en teoría de categorías.
20. **Cardinales débilmente inaccesibles:** Cardinales que no son alcanzables mediante operaciones de potencia y unión sobre cardinales más pequeños.

#### **1.7.1.8 Axioma de Fundación (o Regularidad)**

**Definición:** Todo conjunto no vacio tiene un leemnto “mínimo” respecto a la relación de pertenencia.

**Formalmente:** ∀A(A≠∅ → ∃x∈A(x∩A=∅)).  
**Descomposición de Símbolos:**

* ∀A: "Para todo conjunto A"
* A≠∅: "A no es un conjunto vacío"
* →: "entonces"
* ∃x: "existe al menos un elemento x"
* x∈A: "x pertenece al conjunto A"
* x∩A=∅: "la intersección de x con A es vacía"

**Interpretación Paso a Paso**

1. Para cualquier conjunto A que NO este vacio…
2. ...siempre existe al menos un elemento x dentro de A que NO comparte ningún elemento con A

**Ejemplo 1:**

A = {1,{1},{2,3}}

* X =1 cumple la condición
* 1 no coparte elementos con {1} o {2,3}

**Ejemplo 2:**

A = {1, {2}, {{3}}}

* x = 1 cumple la condición
* 1 no comparte elementos con {2} o {{3}}

**Ejemplo No Valido**

A = {A} # no cumple el axioma

* No existe ningún elemento que no se interseque con A

**Ejemplos:**

1. **Ausencia de ciclos:** Impide casos como a∈b∈c∈a.
2. **No auto-pertenencia:** Ningún conjunto puede ser elemento de si mismo (x∉x).
3. **Paradoja de Russell:** Evita la formación del conjunto R = {x | x∉x}.
4. **Buena fundación de ∈:** La relación de pertenencia ∈ es bien fundada.
5. **Inducción sobre ∈:** Permite pruebas por inducción sobre la relación de pertenencia.
6. **Teoría de tipos:** Cada conjunto tiene un "tipo" o "nivel" bien definido.
7. **Rango de von Neumann:** Todo conjunto tiene un rango ordinal bien definido.
8. **Jerarquía acumulativa:** Todo conjunto pertenece a algún nivel V\_α de la jerarquía acumulativa.
9. **Conjuntos hereditariamente finitos:** La colección de conjuntos hereditariamente finitos está bien fundada.
10. **Extensiones no bien fundadas:** Modelos de teoría de conjuntos que no satisfacen este axioma (AFA).
11. **Teoría de grafos:** Los grafos de pertenencia no contienen ciclos ni cadenas infinitas descendentes.
12. **Recursión estructural:** Permite definir funciones recursivamente sobre la estructura de los conjuntos.
13. **Principio de inducción transfinita:** Aplicable a cualquier relación bien fundada.
14. **Resolución de ecuaciones recursivas:** Garantiza soluciones únicas para ciertas ecuaciones de conjuntos.
15. **Teoría de procesos:** Modelos matemáticos de procesos concurrentes.
16. **Semántica denotacional:** Interpretación matemática de lenguajes de programación.
17. **Eliminación de redundancias:** Todo conjunto tiene una representación canónica sin circularidades.
18. **Forma normal de von Neuman:** Representación estándar de ordinales
19. **Orden parcial estricto:** La relación ∈ forma un orden parcial estricto y bien fundado.
20. **Modelos minimales:** Permite construir el modelo minimal de ZF

### Axioma de Elección (AC)

Este axioma (que junto con ZF forma ZFC) establece que dada una colección de conjuntos no vacíos, es posible formar un nuevo conjunto tomando exactamente un elemento de cada conjunto de la colección.

Este axioma es independiente de los otros axiomas de ZF y tiene numerosas aplicaciones y consecuencias importantes en matemáticas.

#### **1.7.2.1 Axioma de Elección (AC)**

**Definición:** Dada una colección de conjuntos no vacíos, es posible formar un nuevo conjunto tomando exactamente un elemento de cada conjunto de la colección.   
**Formalmente:** ∀F(∅∉F → ∃C∀A∈F∃!x(x∈A∧x∈C)).

**Componentes de la Notación**

1. **∀F:** Para toda colección de conjuntos F
2. **∅∉F:** Donde F no contiene el conjunto vacío
3. **→:** Implica que si se cumple la condición anterior
4. **∃C:** Existe un conjunto C (el conjunto de colección)
5. **∀A∈F:** Para todo conjunto A que pertenece a F
6. **∃!x:** Existe un único elemento x
7. **x∈A:** Tal que x pertenece al conjunto A
8. **x∈C:** Y x pertenece al conjunto C

**Ejemplo ilustrativo**

Consideramos una colección F con tres conjuntos no vacíos

* A = {1,2,3}
* B = {4,5,6}
* D = {7,8,9}

El Axioma de Elección garantiza que podemos formar un conjunto C como:  
C = {1,5,7}  
Donde:

* 1 ∈ A
* 5 ∈ B
* 7 ∈ C

**Características Importantes**

1. **No Constructivo:** El axioma asegura la existencia del conjunto C, pero no especifica como elegir exactamente los elementos.
2. **Generalidad:** Funciona para cualquier colección de conjuntos no vacíos, sin importar su tamaño o complejidad
3. **Elemento Único:** De cada conjunto original, se elige exactamente un elemento

**Ejemplos:**

1. **Elección finita:** Para una colección finita {A₁, A₂, ..., Aₙ} de conjuntos no vacíos, AC garantiza la existencia de una función de selección.
2. **Producto cartesiano infinito:** El producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos es no vacío.
3. **Base para espacios vectoriales:** Todo espacio vectorial tiene una base.
4. **Teorema de Tychonoff:** El producto de espacios topológicos compactos es compacto.
5. **Lema de Zorn:** Todo conjunto parcialmente ordenado donde cada cadena tiene una cota superior contiene un elemento maximal.
6. **Paradoja de Banach-Tarski:** Es posible descomponer una esfera en un número finito de piezas y reorganizarlas para formar dos esferas idénticas a la original.
7. **Buen orden:** Todo conjunto puede ser bien ordenado.
8. **Teorema de Hahn-Banach:** Extensión de funcionales lineales acotados.
9. **Filtros maximales:** Todo filtro puede extenderse a un ultrafiltro.
10. **Teoría de la medida:** Existencia de conjuntos no medibles.
11. **Teorema de König:** Si {Aᵢ | i∈I} es una familia de conjuntos finitos no vacíos y {Bᵢ | i∈I} es una familia de conjuntos donde |Bᵢ| < |Aᵢ| para todo i, entonces existe una función f con dominio I tal que f(i)∈Aᵢ y f(i)∉Bᵢ para todo i.
12. **Teorema del punto fijo de Kakutani:** Sobre correspondencias de valor conjunto convexo.
13. **Teorema de representación de Stone:** Todo álgebra de Boole es isomorfa a un álgebra de conjuntos.
14. **Teorema de completitud de Gödel:** Una teoría de primer orden es consistente si y solo si tiene un modelo.
15. **Funciones de selección uniforme:** Existencia de funciones de selección uniformes para familias de conjuntos.
16. **Teoría de juegos:** Estrategias óptimas en juegos con información perfecta.
17. **Teoría de la cardinalidad:** Dados dos conjuntos A y B, se tiene que |A| ≤ |B| o |B| ≤ |A|.
18. **Sumas directas:** En álgebra, para la construcción de sumas directas de módulos.
19. **Grupos libres:** Construcción de bases para grupos libres de rango infinito.
20. **Ideales maximales:** Todo anillo conmutativo con unidad tiene un ideal maximal.

## Tipos Especiales de Conjuntos:

### 1.8.1 Conjuntos Ordenados

Un conjunto ordenado es una estructura matemática fundamental que combina un conjunto con una relación de orden.

**Definición Formal:**Un conjunto ordenado (o conjunto parcialmente ordenado) es un par (A, ≤) donde:

* A es un conjunto no vacio
* <= es una relación binaria sobre A que cumple las siguientes propiedades:

1. **Reflexividad:** Para todo a ∈ A, a <= a
2. **Antisimetria:** Para todo a,b ∈ A, si a <= b y b <= a, entonces a = b
3. **Transitividad:** Para todo a,b,c ∈ A, si a <= b y b<=c, entonces a <= c

**Explicación de las propiedades de conjuntos ordenados con ejemplos**

1. **Reflexividad: Para todo a ∈ A, a ≤ a**

Esta propiedad significa que todo elemento está relacionado consigo mismo

**Ejemplos:**

* En los números reales ® con la relación “menor o igual que” (<=), tenemos que 5 <=5, 0<=0, π <= π, etc.
* En el conjunto de los divisores de 12 = {1, 2, 3, 4, 6, 12} con la relación "divide a", cada número divide a sí mismo: 1|1, 2|2, 3|3, 4|4, 6|6, 12|12.
* En el conjunto potencia P(X) = {∅, {a}, {b}, {a,b}} de X = {a,b} con la relación de inclusión (⊆), cada conjunto está incluido en sí mismo: ∅ ⊆ ∅, {a} ⊆ {a}, {b} ⊆ {b}, {a,b} ⊆ {a,b}.

1. **Antisimetría: Para todo a, b ∈ A, si a ≤ b y b ≤ a, entonces a = b**

Esta propiedad establece que si dos elementos están relacionados en ambas direcciones, entonces son el mismo elemento.

**Ejemplos:**

* En ℝ con ≤, si x ≤ y y y ≤ x, entonces necesariamente x = y. Por ejemplo, si 7 ≤ 7 y 7 ≤ 7, entonces 7 = 7.
* En los divisores de 12 con la relación "divide a", si a|b y b|a, entonces a = b. Por ejemplo, si 2|2 y 2|2, entonces 2 = 2. Otro ejemplo: si 2|4 y 4|2, se incumpliría la antisimetría (pero esto no ocurre porque 4 no divide a 2).
* En una jerarquía organizacional, si A es superior a B y B es superior a A, entonces A y B ocupan el mismo puesto.

1. **Transitividad: Para todo a, b, c ∈ A, si a ≤ b y b ≤ c, entonces a ≤ c**

Esta propiedad establece que la relación se "transmite" a través de los elementos intermedios.

**Ejemplos:**

* En ℝ con ≤, si 3 ≤ 7 y 7 ≤ 10, entonces 3 ≤ 10.
* En los divisores de 12 con la relación "divide a", si 2|4 y 4|12, entonces 2|12.
* En conjuntos con la relación de inclusión, si {a} ⊆ {a,b} y {a,b} ⊆ {a,b,c}, entonces {a} ⊆ {a,b,c}.
* En una familia con la relación "es ancestro de", si Ana es madre de Beto y Beto es padre de Carlos, entonces Ana es abuela (ancestro) de Carlos.

**Ejemplo Completo: Conjunto de Divisores de 30**

Consideremos el conjunto A = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30} (todos los divisores de 30) con la relación "divide a" (|).

**Reflexividad:**

* 1|1, 2|2, 3|3, 5|5, 6|6, 10|10, 15|15, 30|30 (cada número divide a sí mismo)

**Antisimetría:**

* Si tomamos 2|6 (verdadero porque 6 = 2x3)
* Pero 6|2 es falso (6 no divide a 2)
* Por lo tanto, 2 ≠ 6, cumpliendo con la antisimetría
* Si tomamos 5|5 y 5|5 (ambos verdaderos)
* Entonces 5 = 5, cumpliendo con la antisimetría

**Transitividad:**

* 2|6 y 6|30, entonces 2|30 (verdadero porque 30 = 2×15)
* 3|15 y 15|30, entonces 3|30 (verdadero porque 30 = 3×10)
* 1|5 y 5|15, entonces 1|15 (verdadero porque 15 = 1×15)

#### **1.8.1.1 Conjunto parcialmente ordenado (POSET)**

Un conjunto parcialmente ordenado (POSET) es un par (A,≤)(A,\leq) (A,≤) donde AA A es un conjunto no vacío y ≤\leq ≤ es una relación binaria sobre AA A que cumple las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad**. La característica clave es que pueden existir elementos no comparables entre sí.**

**Ejemplos detallados:**

1. **Divisores de un numero:**

* Conjunto: D(20) = {1,2,4,5,10,20} con la relación “divide a”
* Elementos comparables: 1|2, 2|4, 5|20, etc.
* Elementos no comparables: 2 y 5 (ninguno divide al otro)
* Este es un POSET porque cumple las propiedades requeridas y tiene elementos no comparables.

1. **Conjunto potencia:**

**Texto, Carta

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

1. **Estructura familiar:**

**Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

1. **Subespacios vectoriales:**

**Captura de pantalla de un celular con texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

1. **Números enteros con divisibilidad:**

**Interfaz de usuario gráfica, Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

1. **Tareas en un proyecto**

**Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

#### **1.8.1.2 Conjunto Totalmente Ordenado**

**Definición:**

**Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

**Ejemplos detallados:**

1. **Números reales:**

**Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

1. **Letras del alfabeto:**

**Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

1. **Escala de tiempo:**

**Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación, Correo electrónico

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

1. **Fechas en un calendario:**

**Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

1. **Cadenas lexicográficas:**

**Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

#### **1.8.1.3 Conjunto Bien Ordenado**

**Definición:**Interfaz de usuario gráfica, Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Ejemplos detallados:**

1. **Números naturales:**

**Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación, Correo electrónico

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

1. **Secuencia finita ordenada:**

**Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

1. **Números ordinales finitos:**

**Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

1. **Conjunto bien ordenado artificial**

**Texto, Carta

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

1. **Números ordinales**

**Interfaz de usuario gráfica, Texto, Aplicación, Correo electrónico

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

#### **1.8.1.4 Observaciones importantes:**

Imagen que contiene Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

## La equivalencia profunda entre unión/OR e intersección/AND:

### 1.9.1: A nivel de elementos individuales (función indicadora)

Imagina que, para cada elemento del universo, marcamos con "1" si pertenece a un conjunto y con "0" si no pertenece:

Para un elemento x cualquiera:

* x ∈ (A ∪ B) si x ∈ A **O** x ∈ B
* x ∈ (A ∩ B) si x ∈ A **Y** x ∈ B

Si usamos una función indicadora I(x) que vale 1 cuando x está en el conjunto y 0 cuando no:

* I(A∪B)(x) = I(A)(x) **OR** I(B)(x)
* I(A∩B)(x) = I(A)(x) **AND** I(B)(x)

### Tablas de Verdad

Tabla

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

### Ejemplos concretos

Consideremos A = {1, 2, 3} y B = {2, 3, 4}:

* Union (OR): A ∪ B = {1, 2, 3, 4}
* Intersección (AND): A ∩ B = {2, 3}

### En algebras de Boole y teoría de conjuntos

Esta equivalencia es tan fundamental que las leyes que rigen los operadores lógicos AND y OR son idénticas a las leyes que rigen la intersección y la unión:

Imagen que contiene Texto

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

## La equivalencia del NOT lógico en teoría de conjuntos:

El operador NOT (negación) en lógica tiene su equivalente en la teoría de conjuntos: el complemento de un conjunto.

**Definiciones básicas**

* **NOT lógico:** Operación que invierte un valor de verdad (NOT verdadero = falso, NOT falso = verdadero)
* **Complemento de un conjunto:** Dado un conjunto universal U y un subconjunto A, el complemento de A (denotado como A', Aᶜ o ¬A) consiste en todos los elementos de U que no están en A.

**Equivalencia formal**

Si consideramos un elemento x del universo U:

* x ∈ A' si y solo si x ∉ A

Esto es exactamente análogo a la negación lógica:

* NOT(x ∈ A) = x ∉ A

**Ejemplos concretos**

1. **Ejemplo básico:**
   1. Universo U = {1,2,3,4,5}
   2. Conjunto A = {1,3,5}
   3. Complemento A’ = {2,4}
2. **Conjunto vacío y universal:**
   1. El complemento del conjunto vacío es el universo: ∅' = U
   2. El complemento del universo es el conjunto vacío: U' = ∅
3. **Mas complejo:**
   1. **Universo U** = {a, b, c, d, e, f, g}
   2. **A =** {a,c,e}
   3. **B =** {a,b,c}
   4. **A’** = {b,d,f,g}
   5. **B’ =** {d,e,f,g}

**Leyes de De Morgan**

Las leyes de De Morgan ilustran perfectamente la equivalencia:

1. **En lógica:**
   1. NOT(P OR Q) = (NOT P) AND (NOT Q)
   2. NOT(P AND Q) = (NOT P) OR (NOT Q)
2. **En Teoria de conjuntos:**
   1. (A ∪ B)' = A' ∩ B'
   2. (A ∩ B)’ = A' ∪ B'

Texto, Carta

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.

**Propiedades importantes**

1. **Complemento del complemento**
2. NOT(NOT P) = P
3. (A’)’ = A
4. **Relación con el universe y el vacío**
5. NOT(falso) = verdadero
6. NOT(verdadero) = falso
7. ∅' = U
8. U' = ∅

**Visualización**

En diagramas de Venn, el complemento se representa como toda el área fuera del conjunto pero dentro del universo

**Imagen que contiene Interfaz de usuario gráfica

El contenido generado por IA puede ser incorrecto.**

## Algebra de Boole:

El álgebra de Boole (también conocida como álgebra booleana) es un sistema matemático desarrollado por George Boole en el siglo XIX que se basa en la lógica binaria y opera con valores de 0 (falso) y 1 (verdadero).

### Operaciones Básicas

1. **AND (Y lógico)**: Representado por "·" o "∧"
   1. Devuelve 1 solo si ambos operandos son 1
   2. Ejemplo: 1 ∧ 1 = 1, pero 1 ∧ 0 = 0
2. **OR (O lógico)**: Representado por "+" o "∨"
   1. Devuelve 1 si al menos uno de los operandos es 1
   2. Ejemplo: 1 ∨ 0 = 1, pero 0 ∨ 0 = 0
3. **NOT (Negación)**: Representado por "¬" o " ̅ " (barra sobre el símbolo)
   1. Invierte el valor del operando
   2. Invierte el valor del operando

### Propiedades Fundamentales

El álgebra de Boole cumple con varias propiedades importantes:

* **Conmutatividad:** A ∧ B = B ∧ A y A ∨ B = B ∨ A
* **Asociatividad**: (A ∧ B) ∧ C = A ∧ (B ∧ C) y (A ∨ B) ∨ C = A ∨ (B ∨ C)
* **Distributividad**: A ∧ (B ∨ C) = (A ∧ B) ∨ (A ∧ C) y A ∨ (B ∧ C) = (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)
* **Identidad**: A ∧ 1 = A y A ∨ 0 = A
* **Complemento**: A ∧ ¬A = 0 y A ∨ ¬A = 1
* **Idempotencia**: A ∧ A = A y A ∨ A = A

### Correspondencia entre algebra de Boole y operaciones de conjuntos

El álgebra de Boole tiene una relación directa con la teoría de conjuntos, específicamente con las operaciones de unión e intersección. Esta relación es tan estrecha que podemos establecer una correspondencia exacta entre ambos sistemas:

1. **AND (∧) corresponde a la Intersección (∩)**

* La operación AND devuelve 1 solo cuando ambos valores son 1
* La intersección de conjuntos contiene solo los elementos que pertenecen a ambos conjuntos
* Ejemplo: Si A = {1,2,3} y B = {2,3,4}, entonces A ∩ B = {2,3}

1. **OR (∨) corresponde a la Unión (∪)**

* La operación OR devuelve 1 si al menos uno de los valores es 1
* La unión de conjuntos contiene los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos
* Ejemplo: Si A = {1,2,3} y B = {2,3,4}, entonces A ∪ B = {1,2,3,4}

1. **NOT (¬) corresponde al Complemento (A')**

* La negación invierte el valor de verdad
* El complemento de un conjunto contiene todos los elementos del universo que no están en el conjunto
* Ejemplo: Si U = {1,2,3,4,5} y A = {1,2,3}, entonces A' = {4,5}

**Propiedades compartidas**

Las propiedades del álgebra de Boole también se reflejan en las operaciones de conjuntos:

* **Conmutatividad**: A ∩ B = B ∩ A y A ∪ B = B ∪ A
* **Asociatividad**: (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C) y (A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C)
* **Distributividad**: A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) y A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)
* **Leyes de De Morgan**: (A ∪ B)' = A' ∩ B' y (A ∩ B)' = A' ∪ B'

## Paradojas en Teoría de Conjuntos:

### 1.12.1 Paradoja de Rusell

Bertrand Russell descubrió una paradoja en la teoría de conjuntos ingenua: sea R el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos. ¿R se contiene a sí mismo? Si R ∈ R, entonces por definición R ∉ R. Si R ∉ R, entonces por definición R ∈ R. Ambas posibilidades llevan a una contradicción.

Esta paradoja llevó al desarrollo de sistemas axiomáticos más rigurosos como ZF.

### Paradoja de Burali-Forti

Esta paradoja surge al considerar el conjunto de todos los números ordinales, que según la teoría debería ser un ordinal mayor que cualquier otro ordinal, lo cual es contradictorio.

### Paradoja de Cantor

Cantor demostró que para cualquier conjunto A, la cardinalidad de su conjunto potencia P(A) es estrictamente mayor que la de A. Si aplicamos esto al conjunto universal U, obtenemos que |P(U)| > |U|, pero como U contiene todos los conjuntos, P(U) ⊆ U, lo que implica |P(U)| ≤ |U|. Contradicción.